

Mgr. Alena Vávrová

ABÁKU

METODIKA



MINDOK

Vážení, kolegyně a kolegové,

číst umíme všichni. Dokážeme rozluštit jednotlivá písmena, ale také je umíme spojit do slov a slova do vět. A to bez jakýchkoliv pomocných znaků. Písmenka P, E, S přečteme a spojíme do slova a hned si vytvoříme i představu chlupatého štěkajícího čtyřnožce.

Jak je to s čísly? Přečteme číslice 3, 4, 7 (tři, čtyři, sedm), složíme z nich číslo 347 (třista čtyřicet sedm) a dál? K jakékoliv další činnosti potřebujeme návodné, pomocné znaky, kterým říkáme znaménka operací, závorky, rovnítka. Neumíme se podívat na předchozí trojici a vidět v ní příklad $3+4=7$.

Vidíme shluk písmen, např. ASMO a mozek rovnou začne přeskupovat k smysluplnému slůvku MASO. Vidíme skupinu číslic 1355 a ... a nic. Část mozku probíhá dějepisné události, jestli to není nějaký letopočet. Možná vylovíme 155 jako telefon na záchranku, ale s takovou lehkostí jako u předešlého přeskupení písmenek nedojdeme k příkladu $3 \times 5 = 15$.

Každý člověk někdy luštil křížovku a připadá mu normální hrát hru, kde se na desce skládají slova. Je jasné, že taková hra rozšiřuje slovní zásobu, procvičuje postřeh. Ale co když na desce místo písmen budou číslíčka a hráči budou skládáním vytvářet příklady? Většina lidí nevěřicně zakrouťí hlavou, že vůbec něco takového může existovat. Existuje, mluvíme o hře Abaku. Princip je podobný jako u jiných kriskrosových her, z tažených číslic se vytváří příklady s jednou matematickou operací a může se jednat o kteroukoliv ze základních čtyř a k tomu ještě druhou a třetí mocninu i odmocninu.

Ukažte dětem Abaku, začněte používat a využívat aktivity, které lze z hry odvodit, a nebude trvat dlouho a budete zírat: Děti si s čísly hrají, skládají příklady z čísel kolem sebe, ať se jedná o spz auta či údaj na dopravní značce nebo datum v kalendáři¹. Je šance, že vzniká generace, která se nebude matematiky bát a bude ji považovat za úžasný nástroj k poznávání světa?

Zůstane vám to. Tak jako se jednou provždy naučíme číst (lépe nebo hůře), tak se naučíme počítat (lépe nebo hůře). Nemluvíme o matematice, stejně jako čtení není literatura. Ale dovednost při práci s čísly nám otevře dveře do krás matematiky stejně, jako nám před lety získaná dovednost čtení otevřela svět plný krásných knih.

Vztah společnosti k matematice nezměníme ze dne a den, ale můžeme se podílet na výchově generace, která takovými předsudky trpět nebude. A Abaku tomu pomůže.

¹ Přišel 17. března páťák Richard a povídá, že je dneska krásné datum. Měl pravdu: 17.3.2014 je $17+3=20$, $17-3=14$. Dokáže najít nejbližší datum se stejnou vlastností?

CO JE ABAKU

Největší přínos hry je v odvážném vykročení do oblasti, která je v současné společnosti téměř tabu, do oblasti matematiky, jež je tlačena do role nepotřebné a zbytečně náročné vědy.

Abaku svou přirozenou hravostí pomáhá rozvíjet matematické dovednosti. Nenaučí řešit rovnice, nenaučí konstruovat geometrické úlohy, ale dokonale „vybetonuje“ počtářské dovednosti. Nahradí dril hrou natolik přirozeně, že si dítě ten dril neuvědomí. K zvládnutí matematiky jsou počítací návyky velmi důležité. Ano, kalkulačka za vás vyřeší, kolik je 5×7 , ale bez znalostí, a to důkladné a zažitě znalosti násobků, nelze pochopit a zvládnout počítání se zlomky. A od toho se odvíjí další matematické dovednosti. Matematika je stavba domu. A k tomu, aby dům stál, měl i několik pater, nemůže sem tam kus domu chybět. Nelze budovat další patro, když z předchozího je jen torzo. A Abaku pomáhá při zpevnování základů. Učí počítat v oboru přirozených čísel, umožní získat takové dovednosti, že další návaznosti jdou zcela hladce. Pouze praxí lze dosáhnout takového zautomatizování základních matematických dovedností, že při pohledu na číslo rovnou víme, čeho je násobek, čím ho lze dělit apod.

Abaku je v základní podobě desková hra s danými pravidly. Hraje se většinou ve dvou hráčích, kteří pokládají kameny na desku tak, aby vytvářeli příklady. Vyhodnocování tahů usnadňuje elektronická verze (hry.cz/abaku nebo liga.abaku.cz), hrát kompletní hru na desce je náročnější kvůli zapisování a vyhodnocování tahů, výhodou je, že dobu na jeden tah si lze přizpůsobit. Jenže kdybychom jen hráli partie Abaku, nevyužili bychom ani zdaleka možnosti a přínos hry.

Dobrým fotbalistou se člověk nestane jenom tím, že odehraje spoustu utkání. Jeho forma je daná především tréninkem. Při něm hráči procvičují přihrávky, střely, rychlé starty, ale i vytrvalost a sílu. Uvedené náměty jsou takovým tréninkem. Nebudeme děti hned učit jak odehrát celou partii, ale vyzkoušíme si takové ty střely na branku z různých úhlů, přihrávky apod. Stalo se mi, že děti odcházely z hodiny a v pohodě si pochvalovaly, že dneska byla skvělá matematika, že celou hodinu nic nedělaly, jen hrály Abaku. Nebudeme jim říkat, že spočítaly desítky, možná stovky příkladů, že si procvičily logické uvažování a hledání kombinací. My to víme.

Následné náměty využívají potenciál hry Abaku a postupně rozvíjí dovednosti dětí. Nejsou časově náročné a lze je tedy použít i na časově omezenou část hodiny. Znalost samotné hry k tomu není nutnou podmínkou, ale je značnou výhodou, když vyučující hru zná, nejednou si ji zahrál a vyzkoušel její možnosti a sám už uvažuje o vztazích mezi čísly.

Náměty nejsou nijak výrazně rozdělené podle věku dětí, i když jsme se snažili zachovat rostoucí náročnost aktivit. Je zcela na vás, co s dětmi a v jakém pořadí zkusíte nebo čím se necháte inspirovat. My je běžně používáme s dětmi na běžné základní škole.

PRÁCE S KAMENY

Všechny úkoly plníme se sadou hry Abaku. Děti mají především sáček s čísly, desku používáme jen u některých aktivit. Část sáčku vysypou na lavici, aby mohly hledat potřebné číslice, zbytek kamenů v sáčku slouží pro náhodnou volbu.



Žák vytahuje náhodně ze sáčku kameny a uspořádává je. Využívá přeskupování a přerovnávání. Vytváří řady vzestupné i sestupné. Děti manipulují s kameny (s čísly vytaženými ze sáčku) a uspořádávají je do řad. Možnost přerovnávání dává více prostoru pro upevnění správných závislostí a samotná manipulace s kameny zlepšuje jemnou motoriku. Lze použít i vytváření hada, jehož každý dílek se od předcházejícího liší o jednu, o dvě apod.



K náhodně vytaženému číslu umí přiložit číslo těsně předcházející a těsně následné (vytvoří trojici čísel). Aktivita je vhodná do lavice, na práci ve dvojicích. Jeden žák vytáhne ze sáčku jeden kámen a druhý najde v kamenech vysypaných na lavici požadovaná čísla. Uspořádané trojice zůstávají na lavici k rychlé kontrole.



Vytáhne náhodně deset čísel, jedno vybere a ostatní čísla roztřídí na menší nebo větší, případně rovno než zadané číslo. Opět podporujeme práci ve dvojicích. Jeden žák vytáhne ze sáčku číslo a další čísla pak na střídačku řadí na jednu stranu nebo na druhou od zvoleného čísla. Nenásilně děti směřujeme k tomu, aby vlevo pokládaly čísla menší než zvolené číslo a vpravo pak čísla větší. Je to vhodná příprava a pak upevňování uspořádání na číselné ose.



Z kamenů volně na stole skládá dvojice tak, aby součet čísel se rovnal deseti (popřípadě učitel může zadat i jiné číslo). Uvědomuje si, že při sčítání nezáleží na pořadí sčítanců. Pokud má být výsledek menší než deset, využívá i operace odčítání. Uvědomuje si, že při odčítání nelze čísla libovolně přehazovat. Vhodné pro samostatnou práci i do skupin. Po sestavení dvojic je vhodné prostým pootočením prsty vyměnit pořadí kamenů vedle sebe a ukázat, že opravdu i takhle je výsledek součtu stejný. Při zadání čísla menšího, například 5 či 7 apod., používají děti i odčítání. Opět obracíme pořadí kamenů, aby si děti uvědomily, že 2-7 není totéž jako 7-2.





Ze sáčku vytáhne dva kameny a najde k nim jejich součin, tj. vytváří uspořádané trojice nebo čtveřice. Uvědomuje si, že nezáleží na tom, v jakém pořadí vytažené kameny položí. Dítě náhodně vytáhne dvě čísla, vytvoří z nich příklad na násobení a z kamenů na stole je doplní jejich součinem. Manipulací s kameny si ani neuvědomuje množství procvičených příkladů. Kontrolu děláme průběžně zhlédnutím uspořádaných skupin na lavici nebo se děti kontrolují navzájem ve dvojicích.



Vytáhne ze sáčku číslo a z kamenů na stole k němu vytváří rozklady na dva sčítance, tj. vytváří uspořádané trojice čísel. Uvědomuje si, že pokud je jeden ze sčítanců nula, najde rozklad k jakémukoliv vytaženému číslu. Učitel může omezit použití nuly. Uspořádání kamenů do trojice volíme tak, aby pořadí odpovídalo pravidlům hry Abaku, tj. číslo, znaménko operace, číslo, znaménko rovnosti a výsledek. Toto pravidlo není nutné nijak striktně zavádět, ale při kontrole jej důsledně dodržujeme a děti opravujeme s tím, že to mají správně, jen kameny upravíme do požadovaného tvaru. Jakmile dítě najde rozklad vytaženého čísla, směřujeme ho k hledání dalších možností rozkladu. Vedeme je tak tomu, aby se nespokojily jen s tím, že našly nějaké řešení, ale aby si kladly otázku, jestli problém nemá další řešení. V souladu s pravidly Abaku postupně omezíme řešení s nulou.



Z uspořádaných trojic vytváří řetězce tak, že poslední kámen trojice je zároveň prvním kamenem trojice následné. Využijeme toho, že dítě má na lavici z předchozí aktivity několik uspořádaných trojic a začneme je řetězit. V místě napojování jsou na sobě položené dva shodné kameny, aby si děti uvědomily, že příklady na sebe musí navazovat. U starších dětí (dětí se zkušenostmi s aktivitou) mohou kameny klást na hrací desku Abaku a tím celý řetězec přizpůsobováním rozměrům klikatit. Z počátku děti vytváří řetězce ze součtových uspořádaných trojic, ale velice brzy začnou používat i příklady s dalšími operacemi.



Žák vytáhne ze sáčku číslo a z kamenů na stole k němu vytváří rozklady na dva shodné sčítance. Uvědomuje si, že takový rozklad je možný jen u sudých čísel. Děti mohou pracovat ve dvojicích a vzájemně se kontrolovat. Aktivita je vhodná pro mladší děti, které se teprve začínají seznamovat s násobilkou. Hledání dvou stejných sčítanců je vlastně dělení dvěma a děti objevují zkušeností čísla sudá a lichá (lze ho rozdělit, nelze ho rozdělit). Pokud pracujeme se staršími dětmi, lze úlohu ztížit vytvářením víceciferných čísel a jejich následným rozkladem.





Ke dvěma kamenům se stejnými čísly vytvoří číslo představující jejich součin. K takovému součinu hledá zpětně rozklad na dva stejné činitele. Výsledek umí ověřit na kalkulačce. Touto úlohou vytváříme základ pro používání druhé (a pak třetí) mocniny a odmocniny. I když oba pojmy implicitně nezavádíme, děti danou operaci prakticky znají a umí používat.



Z náhodně vytažených kamenů vytvoří číslo a hledá k němu rozklad na součin dvou činitelů. Uvědomuje si, že pomocí jedničky lze tento rozklad vytvořit vždy a hledá další možné rozklady. Pokud takový netriviální rozklad neexistuje a on to umí potvrdit pomocí Tabulek nebo kalkulačkou, ví, že se jedná o prvočíslo. Děti by měly umět rozklad na součin i s využitím znaků dělitelnosti. Tuto aktivitu začínáme vytvářením dvouciferných čísel a jejich rozkladem, přičemž opět chceme po dětech, aby hledaly všechna možná řešení. U víceciferných čísel učíme děti využívat Tabulky (raději než kalkulačku) k potvrzení, že jimi vytvořené číslo je prvočíslo.



Ze sáčku vytáhne dva kameny a vytvoří z nich dvouciferné číslo. Přeskupením číslic vytvoří jiné číslo a porovná s předchozím. Opět vhodné do práce ve dvojicích v lavici. Děti si navzájem skládají čísla, čtou je a vzájemně se kontrolují. Spontánnímu vytváření víceciferných čísel nebráníme, pouze dbáme, aby se děti nezačaly zbytečně trumfovat a předhánět.



Ze sáčku vytáhne tři kameny a vytvoří z nich všechna možná trojciferná čísla. Vytvořená čísla seřadí podle velikosti. Pokud jsou tažená čísla navzájem různá, vytvoří všech šest variací. Uvědomuje si, že je-li alespoň jedno číslo rovné nule, tak variaci s nulou na začátku nepovažujeme za trojciferné číslo. Tuto úlohu použijeme především pro mladší děti a sestavujeme další varianty z těch samých kamenů. Nalezená čísla zapisujeme. Zdůrazňujeme tím, že se pořád jedná o ty samé číslice, jen vytvořené číslo je jiné. Učíme děti probrat všechny možnosti kladením návodných otázek: A co když budou všechny číslice navzájem různé? Co když bude jedna z nich nula? Nebo dvě nuly? Co tři nuly? Nezapomeneme probrat i varianty se stejnými číslicemi.





K libovolně vytaženému kameni přiřadí jeho druhou mocninu (např. 749, 525). Totéž provádí i s třetími mocninami (např. 28, 8512). Používá i opačné operace, tj. dokáže k druhé, popř. třetí mocnině přiřadit její základ. Správnost uspořádání ověřuje kalkulačkou nebo Tabulkami. Při kontrole dáváme přednost Tabulkám.

Děti znají druhou a třetí mocninu jako zkrácený zápis násobení stejných činitelů již z předešlého období, speciálně druhá mocnina je pro ně zcela přirozená, součin dvou stejných čísel patří k těm lépe zapamatovatelným. Odmocninu přiřadíme jako operaci inverzní („odmocnina z 25 je 5, protože 5 na druhou je 25“). Občas děti ve hře postrádají vyšší mocniny – druhou a třetí mocninu přiřadíme k věcem kolem nás (obsah, objem), vyšší mocniny už ne. Je vhodné zvláště u třetích mocnin ukázat číselné zajímavosti, např. 7343 ($7^3=343$ a zároveň $7-3=4$), 1255 (třetí odmocnina ze 125 je 5, druhá odmocnina z 25 je 5), 9729 ($9^3=729$, $9-7=2$ a $7+2=9$). Děti samy dokážou najít další zajímavosti a velice snadno si tato čísla zapamatují.



PRÁCE S KOSTKAMI

K dalším činnostem používáme abakukostky. Je to sada deseti krychlí se stěnami popsanými čísly podle následujícího schématu:

první krychle: čísla 0 1 2 3 4 5

druhá krychle: čísla 6 7 8 9 0 1

třetí krychle: čísla 2 3 4 5 6 7

čtvrtá krychle: čísla 8 9 0 1 2 3

pátá krychle: čísla 4 5 6 7 8 9

a druhá pětice je stejná. Je vhodné mít alespoň jednu kostku do lavice. Pokud máte na škole Sady krychlí, vyrobíte si je velmi snadno. Jednotlivé sady kostek odlište barevně nebo nějakou značkou, abyste je před započítím další činnosti bezpečně roztřídili do původních sad.



Děti umísťují kostky podle pokynů učitele před, za, vedle, na a přitom dodržují předem dohodu, o kolik se liší čísla na kostkách.



Děti postaví na lavici tři kostky, je jedno jaké kostky a s jakou hodnotou (obrázek vlevo). Na obrázku vpravo je sestava s dohodou, že čísla se liší o jednu. K zadaným kostkám z prvního obrázku byla přiložena kostka s číslem 5 NA první kostku vlevo, kostka s číslem 8 ZA kostku uprostřed, kostka s číslem 5 PŘED kostku zcela vpravo a kostka s číslem 7 VPRAVO od téže kostky. Uspořádání kostek mají všechny děti stejné, správnost čísel je lehce kontrolovatelná. Aktivita je samozřejmě možná i s kameny z Abaku. S kostkami však děti více manipulují, musí je obracet a hledat vhodné číslo. Je vhodné, aby děti používaly obě ruce a rozvíjely jemnou motoriku souměrně, a to zvláště u vyhraněných leváků (ale i praváků).





Žák skrytě sestaví svou kombinaci kostek a popisuje spolužákovi pomocí předložek před, za, na apod. umístění kostek. Na závěr porovnají, že mají kostky umístěné shodně. *Aktivita je v základě shodná s předchozí, děti pracují v lavici ve dvojicích, případně ve větších skupinkách, kde jeden zadává, ostatní sestavují.*



Děti kostky zamíchají a bez dalšího otáčení kostek sestavují následné řetězce. Pokud mají kostky se stejnými čísly, využívají je k rozvětvení řady.

V řetězcích dodržují směr uspořádání čísel zleva doprava a shora dolů. *Práci zadáváme jednotlivcům. Upozornujeme na vytváření řady, i když některá čísla chybí. Řada tedy nekopíruje číselnou osu.*



Děti kostky zamíchají a bez dalšího otáčení kostek sestavují uspořádané trojice čísel. Trojice na sebe nemusí nijak navazovat. *Už to není otázka volného výběru, děti jsou omezené tím, co padlo za čísla. Trojice jsou tvořené dvěma sčítanci a jejich součtem, případně rozdílem a menšencem a menšitelem. Dětem nebráníme ve vytváření kombinací z víceciferných čísel.*

Zase dbáme na uspořádání zleva doprava, případně shora dolů, aby vpravo, případně dole byl výsledek. *Úloha je poměrně náročná, záleží na náhodě, jaké padnou hodnoty na kostkách. Vždy jde sestavit aspoň jeden příklad.*



Žáci pracují ve dvojicích v lavici s jednou sadou kostek. Jeden žák hodí libovolnou kostkou. Druhý vybere ze zbylých kostek, podá vybranou kostku prvnímu hráči a řekne násobek jakého čísla má první hráč vytvořit. Ten nechá první (hrozenou kostku) netknout, neotáčí ji, s podanou kostkou však libovolně otáčí a hledá vhodné číslo tak,

aby z čísel na obou kostkách vznikl násobek požadovaného čísla. *Například: Padne číslo 2. Hráč vybere násobky sedmi. Druhý hráč na podané kostce hledá číslo 1 (21) nebo 8 (28) nebo 4 (42). Aktivita je vhodnější pro násobky nižších čísel (do pěti), které mají vždy řešení. U vyšších čísel úloha nemusí mít řešení, ale i objevení a potvrzení této možnosti je pro děti důležité.*

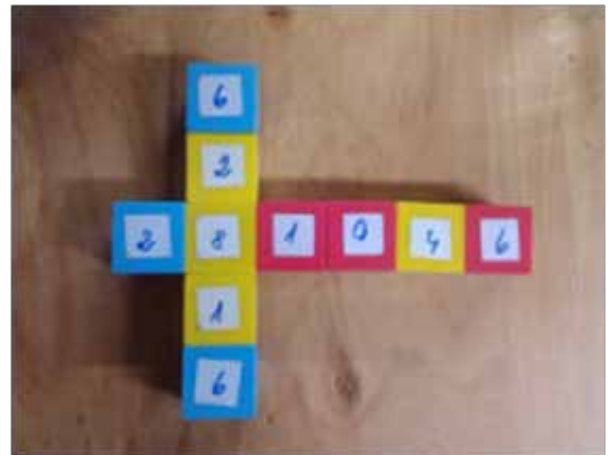




Žák rozhodí kostky, vybere libovolné tři a sestaví z nich trojčíslné číslo (na obrázku 938). Pod dvojicí kostek vyhledá v ostatních kostkách kostku s hodnotou jejich rozdílu v absolutní hodnotě (Rozdílový hrozen). Aktivita je vhodná k seznámení s pojmem absolutní hodnoty, kdy je podstatný jen rozdíl mezi čísly. Pojem absolutní hodnoty není nutné zavádět, ptáme se jen, o kolik se čísla liší. Díky tomu je postavení nuly rovnocenné ostatním číslům, každý řádek může mít na prvním místě nulu. Hrozen lze vytvářet i se základnou ze čtyř kostek, úloha je však náročnější, vyžaduje kombinování kostek a přehazování kostek, abychom dostali kostku s potřebným číslem. Děti této variantě dávají jednoznačně přednost. Vzhledem k tomu, že se zde využije všech deset kamenů, nemusí mít úloha vždy řešení (asi, ještě se nestalo).

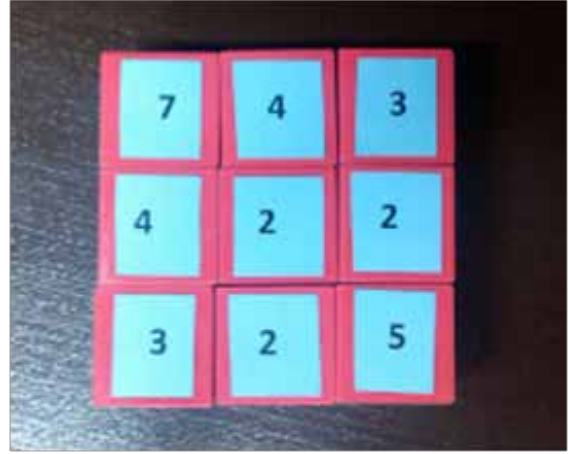
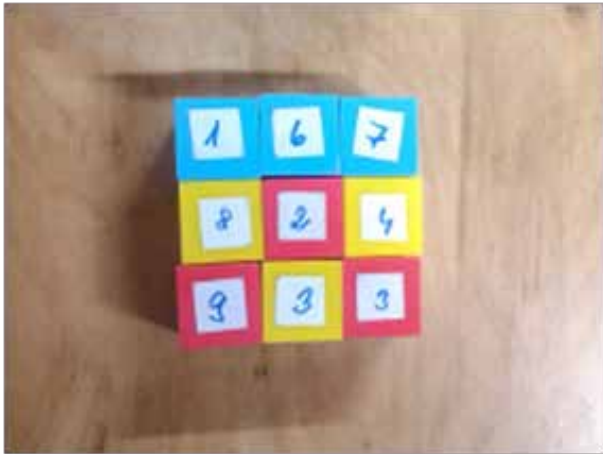


Žák hodí všemi kostkami a do další činnosti je už dál nepřevrací. Z kostek sestavuje na sebe navazující skupiny příkladů tak, že každé číslo je smysluplnou součástí nějakého příkladu. Kostky v jedné řadě na sebe navazují, jednotlivé příklady se mohou prolínat. Na obrázku ve vodorovné řadě je $2+8=10$ a $10-4=6$, ve svislé řadě $6+2=8$ a $2 \times 8=16$. V obou řadách je $2^3=8$. Trváme na tom, že nulu nelze použít jako samostatné číslo, tedy ani nemůže být výsledkem příkladu. Smí být pouze součástí víceciferného čísla. Jakmile žák složí všechny kostky, necháme ho přečíst všechny vytvořené příklady nahlas. Je to výborná zpětná vazba a kontrola správnosti. Děti si většinou samy při hlasitém předčítání uvědomí, kde udělaly chybu. Pokud mají skládání správně, necháme je ve dvojicích si vyměnit kostky bez změny zadání a nechat je, ať poskládají kostky, které předtím měl spolužák. Většinou je pro ně velkým překvapením úplně jiná sestava příkladů z téhož zadání.





Děti z kostek sestavují čtverec 3x3 tak, aby všechny uspořádané trojice ve svislém i vodorovném směru vytvářely příklady.



Úlohu lze zadat s omezením jen na sčítání a odčítání (jako na obrázku vpravo) nebo nechat povolené všechny operace. Zadání je spíše hlavolamem a je vhodnější pro samostatnou práci. Děti si musí uvědomit, že požadované číslo nemusí být na zbylé kostce, ale že je potřeba některé kostky vyměnit a tím se dostat k požadovanému číslu. Úlohu lze modifikovat pevným zadáním některých kamenů (středového, rohových, prvního řádku). V těchto případech je vhodné vycházet z již hotové sestavy, aby zadávající měl jistotu, že úloha má řešení. Například můžeme zadat požadavek, aby v rozích byla čísla 1, 7, 9, 3, protože podle obrázku vlevo víme, že úloha je řešitelná.



8
4
7
0
1
3
0
-
1
2
2
4
1
3
5
6
7
+
3
5
8
3
=
5
8

9
5
7
8
1
9
4
9
1
3
4
4
1
7
5
6
2
7
0
-
1
2
2
4
5
1
3
4
7
1

PRÁCE S ČTENÍM ŘAD



Dostane vytvořený řetězec a najde v něm jednotlivé uspořádané trojice. Ukázka je přímo z části desky

Abaku, ale vytvořit takový řetězec nedá žádnému učiteli mnoho práce. Je vhodné jich mít připravenou větší zásobu, aktivita patří u dětí k velmi oblíbeným. Učíme děti číst řetězec

			8	4	4	8	7	1	8	7	1	6	3	3	6	2	8			

zleva doprava, popřípadě shora dolů. Je vhodné nechat nalezené příklady zapsat. Zpočátku stačí napsat řadu čísel na tabuli (je vhodné začít příkladem na násobení a pokračovat součtem např. 382462 je 3x8=24, 38+24=62 atd., atp.) a nechat děti chvíli samostatně hledat. Pak třeba jen říkat, kolik příkladů kdo našel a na závěr je společně odhalit. Úspěšně se zapojují i slabší žáci. Nenajdou všechny příklady, ale určitě jich několik objeví.



Ze záznamu partie vyhledává jednotlivé příklady a zapisuje je s matematickými operacemi. Zásobu dohraných partií najdete v příloze volně k dispozici,

ale není problém, aby si každý hráč dohranou partii uložil a pro potřeby práce ve třídě vytiskl. Další možností je promítnutí na tabuli a společné zakreslování objevených příkladů. Je až překvapující, jakou má tato aktivita mezi dětmi oblibu, a to bez rozdílu věku. Stejně nadšeně na ni reagují pátáci i devátáci. Z počátku necháváme děti hledat třeba jen příklady na násobení nebo jen příklady na sčítání dlouhé alespoň 4 cifry, příklady s trojkou atd. atp. Je vhodné nechávat aspoň občas příklady zapsat. Dbáme na to, aby děti správně zapisovaly (s plnou symbolikou) druhé a třetí mocniny a odmocniny. Děti by postupně měly dokázat každý kámen na desce zařadit alespoň do jednoho příkladu. Výhodou jsou vlastní odehrané partie, kde hráč ví, že se ve hře vyskytly i „velké“ příklady, a vede děti k tomu, aby je objevily.

4	5	5	5	0	4	0	9	0	2	8	8							5
							5				3							0
							1		9	1	7	1	3	4				
			8	2	7	6	6				0							7
		6	2	4			0				1							3
				6						8	5	3	6	1	8			
				4		9				7			3	2				
	2		9			8	2	5	7	7	4	9	4					
	6		9			1			8			7						
	8	2	1	6		7			0			9						
				5							7	4	6	8	0			
5				6			1			8		3		1				
4				2			1			4		3		0				
9		3	7	3	0	7	9	6	3	9		5		5				
6	3	9					2			1	2	8	4	2				



Upozornění na některé zajímavé kombinace najdete v přehledu dohraných partií na konci této metodiky.

PROBLÉMOVÉ ÚLOHY



Doplní zadané číslice (čísla) třetím číslem tak, aby vznikl příklad. *Napište na tabuli dvě čísla (třeba 2 a 5) a děti doplňují možný výsledek. Jakmile jim dojde, že operacím se meze nekladou, jsou schopné i mladší vás překvapit návrhem doplnit číslo 25 nebo 32 (5 na druhou nebo 2 na pátou). Velmi vhodná aktivita pro začátky práce s Abaku.*



V uspořádané pětičce 97988 najde dva různé příklady s pěti ciframi (tj. $97-9=88$ a $9+79=88$). *Hledá další uspořádané pětičce s danými vlastnostmi. Úloha učí děti vyhledávat příklady v uspořádané n-tici čísel. Jejím největším přínosem je právě možnost různých řešení. Proto je lepší nedovolit dětem vykřikovat správné řešení, ale nechat je příklad zapsat a pak zkontrolovat a postrčit je, aby hledaly druhé řešení. Pokud dětem v tomto období ukážeme jen jeden příklad s uvedenou vlastností, těžko samy přijdou na další řešení. Přidejte další (a případně další) příklad a nechte děti z vyřešených ukázek odvozovat vlastnosti dalších příkladů. Ve vyšších ročnících, kdy děti umí sestavovat rovnice, je dovedeme k obecnějšímu řešení. Ideální jako brainstormingová práce s celou třídou. (Výsledek je násobkem 11, příklad musí obsahovat devítku. Celkem existuje 7 řešení (31922, 42933, 53944, 64955, 75966, 86977, 97988)).*



V uspořádaných skupinách hledá příklady, pokouší se najít všechna řešení (např. 71863, tj. $7+1=8$, $18:6=3$ a $71-8=63$). *U této aktivity je vlastní zkušenost učitele s hrou Abaku téměř nutností. Zásobu příkladů pak má přímo ze hry. Jinak je možné si vytvářet skupiny čísel z násobilky – k dvojčíslí z činitelů přičíst výsledek a dětem předložit výsledné šestičíslí. Např. $4 \times 8 = 32$, tedy 483280 $48+32=80$. Je vhodné hledat výhodnějším uspořádání jednotlivých členů, jestli by vedlo k více příkladům.*



Vezme tři kameny se stejnými čísly a doplní je dvěma dalšími kameny (nemusí být shodné) a tím vytvoří příklad. Zapiše i případné další příklady, které tímto uspořádáním vznikly. *Např. 444 doplní 1 a 5 na 41445, neboli $41+4=45$ a zapsané další příklady jsou ještě $4 \times 1 = 4$, $1 \times 4 = 4$. Tato úloha jako samostatná práce je vhodnější pro šikovnější děti. Lze ji samozřejmě řešit společně a děti dokážou hledat i různé varianty. Necháváme děti, aby si vychutnávaly eleganci matematických příkladů, ptáme se, který příklad se jim víc líbí a proč. Nebráníme jim v názorech, že prostě líp vypadá.*





Vezme tři kameny se stejnými čísly a doplní je dvěma dalšími kameny, které mají také stejné číslo, a tím vytvoří příklad. Např. 444 doplní 1 a 1 na 44114, neboli $44:11=4$. Pokusí se najít všechna řešení, což kromě případů, kde využijeme kameny 11, jsou pouze příklady 33399 tj. $3 \times 33=99$ a 22244 tj. $2 \times 22=44$. Je vhodné dětem jeden příklad ukázat, a to ten s jedničkami. Děti brzy všechny objeví, navedeme je, že existují i jiné. Řešení jim ale neprozrazujeme, je důležité, aby samy došly ke všem možnostem. Potvrdíme jim, že mají všechna řešení, nechceme po nich nijaké obecné zdůvodňování.



Uvědomuje si, že pro sčítání a násobení platí komutativnost. Sestaví příklad, ve kterém ukáže, že přehození sčítanců a činitelů může v původním příkladu vytvořit další příklady. Např. 6848 obsahuje jediný příklad $6 \times 8=48$, ale při položení kombinace 8648 získáme hned tři příklady $8 \times 6=48$, $8^2=64$, odmocnina z 64 je 8). Při té příležitosti naučíme děti počítat bodovou hodnotu příkladu. Jedná se vlastně o ciferný součet použitých číslic (příklad $12+3=15$ má hodnotu $1+2+3+1+5=12$ bodů). U mladších dětí není nutné tento pojem zavádět. prostě sečtou použité číslice. Starší děti mají pocit, že jim ten ciferný součet konečně k něčemu je. Nasměrujeme děti na procházení příkladů malé násobilky, kde mohou najít další možnosti výhodnosti přehození činitelů. Aktivita je to poměrně piplavá, ale jestliže děti mají zkušenosti s vlastní hrou, uvedou rychle řadu příkladů.



Hledá uspořádané n-tice, z kterých přiložením jakéhokoliv čísla na konec nebo na začátek řady vznikne opět smysluplný příklad (viz ukázky):

16824 ($16+8=24$) doplníme na 168247 ($168:24=7$)

3618 ($3 \times 6=18$) doplníme na 36182 ($36:18=2$)

52844 ($52-8=44$) předsadíme na 352844 ($352:8=44$)

81765 ($81-76=5$) předsadíme na 481765 ($48+17=65$)

Samozřejmě je možnost přikládat na oba konce původní n-tice:

927 ($9-2=7$) doplníme dopředu i dozadu na 39278 ($39 \times 2=78$)

Dbáme na to, aby se příklad původní i konečný týkal všech kamenů.

Zvláštní pozornost věnujeme přikládání nuly. Třeba: 1569 ($15-6=9$) upravíme na 15690 ($15 \times 6=90$), nebo 3284, 3824, 8199. Opět platí, pokud mají děti zkušenosti s vlastní hrou, mají v zásobě řadu vlastních příkladů. Naučte děti, aby se o pěkné příklady dělily, přinášejte jim i své příklady, rozebírejte je, vymýšlejte další zdokonalení. Nemá smysl, aby se děti učily pěkné kombinace nazpaměť, časem si vytvoří své oblíbené řady (už znáte 97299?).





K uvedené dvojici příkladů ($23+75=98$ a $32+57=89$) hledá další dvojice se stejnými vlastnostmi. Dojde k obecnému vyjádření ($ab+cd=ef$ a $ba+dc=fe$) a odvozuje podmínky pro výrazy. Tj. žádné písmenko se nesmí rovnat nule, $a+c$ stejně jako $b+d$ musí být menší nebo rovno devíti. Žák by si měl uvědomit existenci triviálních řešení, kdy $a=b$, $c=d$, tudíž $e=f$. Úloha není náročná a i přes obecné vyjádření děti naleznou řešení. Je vhodné ukázat desítkový rozvoj čísla.



8
4
7
0
1
3
0
-
1
2
2
4

1
3
4
3
1
3
5
6
7
+
3
5
8
3
=
5
8

4
9
1
3
4
4
1
7
5
6
2
7
0
-
1
2
2
4

5
1
3
4
7
1

6 9 6 2 7 8 4 0 9 6 7 8 4 4 7 4 2 1 7 8 4 0 7 4 2 4 9 3 9

ZAČÍNÁME HRÁT CELOU HRU

Teď možná přichází ta správná chvíle zahrát s dětmi první partie Abaku. Vědí, jak se pokládají kameny na desku, z rozebraných partií ví, jak příklady na sebe navazují. A ideálně, vyučující měl dost času sám odehrát tolik partií, aby se zorientoval v pravidlech. Internetová verze je pro začínající hráče ideální ze dvou důvodů:

- hlídá správnost tahů a vyhodnocuje všechny vzniklé příklady a
- umožňuje hru se stejně silným protihráčem volbou **Vyzvi kamaráda**.

K internetové verzi se dostanete na

- **hry.cz/abaku**. Tuto verzi označují pravidelní hráči za designově podařenější a téměř vždy lze nalézt protihráče. V lize se vyskytují velmi zkušené hráče, a proto zpočátku dětem hrát ligu nedoporučujeme (porážky jsou velmi kruté). Mimo ligu si lze zahrát s náhodným protivníkem nebo vyzvat kamaráda. Pokud dopoledne v počítačové učebně si všichni zvolí **Hraj hned**, budou hrát mezi sebou, výjimečně se do toho připele někdo z venku.
- **liga.abaku.cz**. Má výhodu delšího času na tah. V době vyhlášené ligy zde hrají především registrovaní hráči dané kategorie (ZŠ a zvláště SŠ), ale dá se navolit Trenink-hra, je možné stejně jako u předchozího odkazu pozvat kamaráda a nebo lze hrát hru s robotem. Ten je tu ve třech různých úrovních a tím pádem lze zvolit odpovídající náročnost. Mimo období ligy se tu protihráči na partii v podstatě nevyskytují.

Teď už je nutné mít osobní zkušenosti s hrou Abaku. Pokud jste to ještě neudělali, přečtěte si podrobně pravidla. Vy, bez ohledu na to, kolik partií jste už odehráli. Děti na vás spoléhají, že dokážete vysvětlit, proč tenhle tah se počítači nelíbí, že popřípadě poradíte, co s kameny. U nás platí pravidlo, že kdo má dvě (tři) a více nul, může si přímo pomoc vyžádat. Předpokládáme, že děti mají představu o systému pokládání kamenů na desku – tu získaly mimo jiné luštěním dohraných partií. Postupně se učí pracovat s bonusovými poli. Počítejte s tím, že první hodina s celou třídou na počítačích s Abaku vám přinese především technické problémy (proč mi to nefunguje?), hlavně u mladších dětí si sledování hry napoprvé moc neužijete.

Nedovolte dětem hru vzdávat. Nikdy se nenaučí tolik jako z porážky. Pokud jste vy jejich protihráčem, klidně využívejte jejich chyb, nedávejte jim body zadarmo. Děti se učí velmi rychle a právě tehdy, když jim ta chyba neprojde, učí se mnohem intenzivněji. Budou nadšené po první partii, ale opravdu tomu přijdou na chuť po několika odehraných zápasech. Až poprvé vyhrají s někým cizím, až se jim podaří nádherný tah. A začnou hrát i mimo vaše hodiny. (Jeden z autorů Abaku může vyprávět o překvapení z dětského klubu, kam odpoledne napochodovala horda kluků přímo z hřiště s míčem pod paží a šli si na hodinku-dvě jen tak zahrát Abaku. Pak šli zase s míčudou na hřiště.)

V tuto dobu už děti využívají všechny výše uvedené aktivity ke zdokonalení svých dovedností. Zajímají je složitější problémy, nespokojí se s jednoduchými postupy, hledají a dávají si výzvy – čtyřciferné příklady s násobkou v časovém limitu, součtový hrozen pouze a jenom ze všech kostek, kostkovou řadu na jeden desetiferný příklad, trumfují se svými znalostmi. Mají úžasnou hračku – čísla. Pomocí Abaku si našly pozitivní vztah k matematice a my doufáme, že jim to vydrží.

DOHRANÉ PARTIE

4	5	5	5	0	4	0	9	0	2	8	8			5
						5				3				0
						1	9	1	7	1	3	4		
		8	2	7	6	6				0				7
		6	2	4		0				1				3
			6					8	5	3	6	1	8	
			4	9				7		3				2
	2	9			8	2	5	7	7	4	9			4
	6	9			1			8			7			
	8	2	1	6	7			0			9			
			5						7	4	6	8	0	
5			6			1			8	3				1
4			2			1			4	3				0
9		3	7	3	0	7	9	6	3	9		5		5
6	3	9				2			1	2	8	4	2	

1

9	1	4	3	4	8		7	2	2	3	6	3	9	7
					6	0						9		6
			6	4	1	0	6	4		0				1
			5	6	8	7	0		1			3		7
			3	5	7		6			0				7
			0	3				7	0	2	3	5		
					8				6					
1	5	1	1	4	2	4	6	4	8	7	2	7	3	4
		8			5				1					8
		9			6				9					3
7					5				9	7	2	9		2
5	3	2	4	2	8		5		0	4	3			4
5							2	8	1	9	9	9	8	1
8								1						5
0			5	2	8	6	0							9

2

4	1	3	7	6	1	0	8	6	4	8				5
6							8					7		3
6				2		6						7		5
6			7	4		1			4					2
7		7	5	3	7	8	1	9	7	2	9	8	1	
				9	6	9				7				1
					4									8
2	6	9	3	5	0	5	2	5	0	2	0	7	0	9
						3								
				9	0		3	3						
		1			8	6	3	6	9	4				
		3	9	3	1	4	0	9	3					
1	5					5	4	7						9
4	8		6	1	4	2	0							8
4	2	2				8	0	5	8	5	2	1	0	

3

2	5	5	4	6	9	5	4							8	
					0			1	2	5	7	7	1	4	
			1	7	3	2	0					3		6	
			7	0						8	2	4		9	
			9	3								3		0	
7			8	2	1	0			6	3	9	7			
4					0			2						2	
2	8	5	8	2	3	3	9	1	8	9	1	8	7	1	
8			9	0				0						9	
			7				1	6	7					6	
	3	2						5		2	1	3			
	6							5				6			
	6	9	5	4	6	9	5	4	1	5	8	7	4	9	
	6						1				6				
						5	8	4	0	8	3	4	3	4	0

4

7	1	6	1	1	0	7	3	4	3	7	6	6	8	2
1				8										1
8	6	4	8	9	1	7	8	1	9	9	0			6
		2	7						3					2
		2	5	2	5	1			3	9				7
		4	9	6			6	0	3	2	0			
		0	5	9	5				2					6
4	8	3	2		7	4	9	0	0	7	0	7	0	
			5	8	4	0	4			6				3
	5	4	1				5			8				2
			5				9			7				0
			3				8	3	2	8	5			
					3	6					1			
					3	4					9			
					6	9	5	4	2	7	9	1	8	

5

3	0	5	6		4	2	4	2	1					9
8					5									3
3					9			8						9
8	6	4	9	0	5	9	5	4	2					0
1					2			8	2					3
9					7			3	4	3	3	7		6
1	7	8	7	0	8			1				5		1
6			5		2	8	8	1	6		9	2	1	8
3			7		8			4						7
		5	6	3	0	9	7	0	7	7	4	9	3	
		1		2										2
9	6	5	4	9	6			7	0	3	0	4	0	
2														
1														
8	4	1	2	5	6	0	1	5	6	0	5	6	4	

6

poslední řádek:

$8+4=12$, $12 \times 5=60$, $560:1=560$, $60-56=4$

8	8	7	6	1	2	5	5	8				
6		7						9	0	3	3	0
4		1			1	7	7	1	0			
8		6	2				2					
6	2	4	1	0	4	0	8					
4	2			7	7	4	9	7	7	2	9	8
2	4	0	6	3	4		2					5
8	4	2			9	3	3	1	3	9	3	1
5	6						1	0				3
2	6						5	4				0
3	6		4	7	1	4	8	5				3
9	6			6	5	2						9
5	1	0	5	0		7	9	5				0
9					6			1	8	9	9	
8					8			5				3



první řádek začíná: $88-76=12$, třetí odmocnina ze 125=5

první sloupek: $28-5=23$, $3+95=98$

		7	8	5	6	4	5	2	0	5	4	8
		8		6						3		0
		1		4						1		1
		7	0	2	6	8	6	3	5			8
		7	7	7	7	1		0		3		1
		4	9			9	0	5	0	4	0	
				8		6				3		9
	5	9	4	5	1	4	5	9		7		1
				2	7					6	3	9
	9	8	2	9	6	4	5	3	2	0		
	1		2	8						2		3
	4	9	3	6		0	8	0				3
	7					6	4	8	7	2	9	
	6	2	5	2	5			4	0			2
						6	3	9	1	8	1	1



první řádek: $7 \times 8 = 56$, $56 - 4 = 52$, $20 : 5 = 4$
čtvrtý sloupek zprava: $5 \times 3 = 15$, $1 \times 53 = 53$,
 $53 + 7 = 60$, $60 + 20 = 80$. Poslední osmička dole už se
sloupkem nesouvisí, je oddělená nulou.

9	7	2	9	1	0	9	0	3	0	6	0	7	5	3
			6	7										8
5	7	5	4	3	2			7						4
			6					0	5					9
			4					6	4					3
		9	8	1	7		5	9	4	5	9			9
			1	5				6	6					3
			7	5	5	1	0	4	8	3	2			1
			3	7										8
	8	2	8	9	0			1	3	7	2	0		6
			6								7			8
			4	1	3	3	1	0	5	8	2	8		7
			8									9		6
			4									8		4
4	2	0	1	4	2	0	6	2	6	1	5	1	3	2



1	5	9	2	4	9	3	6	9	1	8	8	8	9	6
	0						7					6		3
	8						6					4		9
		1	0	3	7		7	8	3	4	4	4		7
		9			7	1	6		1					
				4					3	0	4	0	7	0
		2	2	1	3	9				1	6			
8					8	5	3	8	2		8	5	1	3
7					3				1	6				
1	6	7	8	7	5			2	2	0	4	0		
6			2		9					4				
3	6	3	9	7	2	0	9	0	8					
4							1							
5	2	5	2	5	0		5	5	2	5	4	7		
0								6						



				1	4	7	7			9				
5				4						7				
6				8					7	2	9	8	1	
5		6	4	6	4	1	3			9				
0		5	3						5	7	3	6	0	
6		9	5							2		2		
1		5						6		9		8		
5	0	2	4	2	6	3	9	7	2	9	8	1	2	3
3	3							1		9		8		
3	2							6		1		1		
4	7		4	4	8	9	7	2	9	5	0			
8	5	4	2	0	6				9		3			
6	0				1				1		0			
4				1	7	7	3	8	0		4			
2	5	6	5	8			0		0		0			



první sloupek: $56-50=6$, $6-1=5$, $15+33=48$,
 $8^2=64$, $6-4=2$

pátý sloupek zprava: $9-7=2$, $9^3=729$, $7+2=9$,
 $9-7=2$, $9^3=729$, třetí odmocnina ze 729=9,
 $97+2=99$, $99 \times 1 = 99$, $9:9=1$, $9 \times 1 = 9$, $1 \times 9 = 9$, $9:9=1$,
 $1+99=100$

6	9	5	4	5	1	3	5	4	2	3	5	7	8	0
				7					6					
				5			8	8	6	4		7		
8			7				5			4	2	6		
2	7	9	3	6				9	7	2	9	9	3	
1			4	2			3	9			7	3		
8				4	0						7	3		
6	3	1	6	2	5	2	5	1	0	2	8	1	9	9
						1	0				0			
4	9	1	4	8	2	6	2	8	9	7	2			
5			1			3	0				0			
9			3			8		6	5	1	6	6		
			1			4					0			
			7			4								
			7	4	8	1	8	5	3					



4 7 0 7 3 1 6 3 0 7 4 5 2 x 2 4 7 0 7 3 1 6 3 0 7 4 5
8 4 7 0 7 3 1 6 3 0 7 4 5
8 4 7 0 7 3 1 6 3 0 7 4 5
0 1 3 0 7 4 5
1 3 0 7 4 5
2 2 4 4 9 3 9
2 2 4 4 9 3 9
4 9 1 3 4 4 9 3 9
1 3 4 4 9 3 9
1 3 4 4 9 3 9
3 4 4 9 3 9
6 7 0 7 4 4 9 3 9
7 8 4 4 7 4 2 1 7 8 4 0 7 4 2 4 9 3 9
6 9 6 2 7 8 4 0 9 6 7 8 4 4 7 4 2 1 7 8 4 0 7 4 2 4 9 3 9

8
4
7
0
1
3
0
-
1
2
2
4
1
3
4
3
1
3
5
6
7
+
3
5
8
3
=
5
8
6
9

1 3

						9	0	8	7	3	4	2	8
			9						2		7		
			0			6	5	3					
			4			0	2	5					
8	6	1	6	9	5	4	1	5	3	2	5	1	
	0		4			8	7	2					
3						2							
3	2	1	8	5	0	4	3	7	5	0	9	8	1
0						9			8		5		
7	4	3	7	4	9	7	6	1	7	6	1	7	0
						8		9	5				
	7	0	6	4	6	2	8	3	0	3	8	0	
					4	1		1					
					6	3		9					
4	2	2	1	2	3	4	5	9	1	5	9	7	6

1 4

4	2	8	2	7	1	5	7	6					4
4													7
1					8						8		7
5					0			9	3	5	8	8	4
2		2	4	1	3	1	1			6	1		0
9					7					5	9		5
3					7					3	9		8
2	7	9	3	1	3	3	9	8	1	3	9	8	4
6			0		7						1		
0			9		4	7	1	7	5				
6			0			4							6
2			0	3	0	5	6	2	5	8	6	4	0
8	6	1	6	9			8						2
6							7						0
4			9	6	9	4	2	2	5	5	0	3	5

1 5

6	5	1	6	4	8	7	2	9	5	1	9	6	3
	6												8
	6			8							2		2
		5			0			9	7	2	4	6	4
		1	7	7	4	9			4		6		0
		3			0		1	9	9		4		
		4			2				7		8		
7	2	8	3	5	8	7	5	6	7	5	8	1	5
		6		0					2		3		3
		4		5					9		5		4
3	2	8	4	0					8		2		3
0					1	0	2	1	3	1	8	9	9
3	4	7	5	0				3	9		6		3
0								5	7				1
1								8	2				6

1 6

6	3	8	5	5		8	7	1	5				7
		1		3				5					5
7	2	9	9	8	1	9	9	0	8	6	4		3
		7		2				5		3			7
		2		4				0		9	3		2
1	6	9	7	0	6	3	7	1	7	7	1	0	8
8		9						6			4		1
9	5	4	6	3	5	1	1	2	4	6	4	2	5
		5			0			8					
		4			2		3	8	2	4	0		
		2			9			6	0	1	6	0	
		6	0	5	8	2	4	6	4		3		
						1		4		3	3	0	9
								8					
								8					

1 7

1	1	4	2	5	3	9	5	2	9	7	1	8	6
5										5			9
6			3							0			5
9		1	4	1	4	2	4	0	2	5			9
0			4					0	0				1
8			3					4	0	3	4	7	4
3			8		7	3	9	8	2				8
7						1		4					3
0				7	9	6	8	5	3				2
2					9			7					
7			6		1	5	3	5	4	8			
2			7	8	2	8	0		0	5			
6			2						3				
6			6						6				
6	0	8	6	8	7	4	9	1	1	9	0	1	5

1 8

								3					4
						5	5				2	4	6
6	6	2	8	9	4	2			6				4
						2	5		4				4
		5	2	3	5	5	1	6	4	2	8	5	3
		3			6	0			4		8		7
		2		9							2		
9	8	1	0	8	8	8	1	6	7	2	3	6	2
		8		1		1	3				0		7
		5		9		4	1		7				2
		0		8		0	0		6				5
				7	7	1	4	9	7	7	1	6	6
				3		0	1		7				7
				9		8	8	5					
9	3	3	9	0			0	1	3	4	7	5	0

8
4
7
0
1
3
0
-
1
2
2
4
1
3
4
3
7
1
3
5
6
7
+
3
5
8
3
=
5
8
6

1 9

7		3		7					5				
2		4		3	9	4			4				
9		7		7		0			9				
8	2	0	5	4		0		2	1	8	3	6	
1		0		5	3	9	1	4	0			4	
7				7	7			2				8	
2				5	3							4	
9				8	6	4	8	8				2	
8	8	1	9	9	0	0				3		6	
8				7	4					6		5	
6	7	6	1	5	6	3	2	6	5	1		3	
4	2			5	8					8		0	
1	2	0	2	1	0	3				1			
6	7				2	4	6	7	5	3			
5	0				5					3	9	1	9

2 0

8	5	3			6	8	1	4	5	9	4	5	5	1	
8				8						0					
1				9						0					
6				7					7	0	3	7	3	4	7
1		8	4	2	8	2				0					
4					2				1	2	2	4	2	6	
2					6				7	4					
4	5	5	9	9	1	8	7	2	5	6	3	0	3	6	
1		3	2			1			0						9
0		6	5			5				2					5
1		9									6				9
4		9	3	3	1	0	7	0	8	0					8
3		6						7							
1	7	8	0					4	4	8	3	6	3	6	
7						9	7	2	9						9

2 1

						4									8
						9			7						6
9	3	3	0	6	3	9	7	2		8					5
						4			2						9
			7			2			8						1
2		8	6	4	9	0	8	1	9	0	7	5	1	2	
8			1				2								5
6	6	8	7	4	6	9	5	4	9		9				5
3			5				4				1				5
4	3	1	2	3	1	4	2	8	5	0	9				7
2			7		0						0				6
2			3	4	3	6	7	0	6	0	1	0			7
4						8									6
0						4									1
7	5	2	3	9	8	1	7	8	1	3	5	0	6	3	

2 2

7	6	7	2	4	6	4	8	8	1	2	2	0			
								7							
		6	5	1	5	7		3							
				4				9							
				5	0	0	1	0	5	0		8			
		8	1	9	9	0		6				0			
				3			2	8				7			
1	6	7	6	4	2	3	4	7		1	8	1	8	2	
							3								2
4	5	8	5	3	1	2	4	4	8						0
1			3			6			9		5				
3		8	3	7	9	0	6	1	7	3	1	4			
9			5					9		2	5				
8			6			3	6	5	4	9	0				
0									4	9	7	2	6	3	9

2 3

8	6	4	8		4	5	2	0							
9					5										
7	2	9	8	1	9	9	0			3		7			
2					7					8		4			
8	8	1	2	7	6				3	8	2	4	2		
6					5				4		4		8		
6					9				3						
8		1	7	5	1	2	5	7	4	9	7	7	2	9	
0		6			2										
			5			9	0	1	9	1	1				
3	3	6	6	6	3	6					3				
5	5										3				
1	0	1	0	0	1	0	6	4	9	1	5	0			
3											0				
4	3	7	5	0	8	5	8	6	4	7	2	9	7	2	

2 4

5		7	1	5	0	2	1								
3							7								
4	0	1	5	2	5		5								
7			0				2	2	1	2	3				
6	2	8	1	2	8		7		0		9				
			0		7		5		7	3	3	4	0		
			5		1		3		7		6		1		
5	4	1	8	6	3	1	8	9	0		9	4	1	3	
			4		6		0				3		0		
			8	6	4	8	8			4	3		1		
			2			6				8	6		0		
			9	4	5		4			6	3	9	7		
							8			4		6			
							5			2					
7	7	6	9	8	5	3	8	2	4	0	2	9	6	9	

8
4
7
0
1
3
0
-
1
2
2
4
1
3
4
3
1
3
5
6
7
+
3
5
8
3
=
5
8

3 1

				1	6	7	4	3	7	3	6	2	
5	0	4	2	8								7	
		0	8	9	1	9	0	3		8		3	
		5		7				2	4	6	4	9	
	5	0	2	2	5			7		4		5	
		9		8	0	3	8	3	5	8	2	1	
		0				6	0				9	9	
					7	3	4	3			1	4	
	5					8	2	4	0	8	0	5	
	1	5	6	9			7					1	
		1			4		9		8			3	
		5			0		3	6	1	8	2	4	
		6	3	6	6	4	2	6		9		8	
					0				7			1	
						1	7	1	7	2	9	7	2

3 2

2				6	3	9	7					6		
9				5								6		
2	0	2	0	1	0	5	3	6	3			1		
7				2						5	8	9	6	7
2				4				8		4	3	4		
5				9	6	3	9	5	4	9	6	2		
7								5			9	1		
7			3	8	7	4	5	9	3	3	1	4	4	8
3			7					0			5	1		
6		5						9	7	2	9	8		
6		7						1		9	1			
7		8	4	2	6	7		8	6	8	5	1	1	
1							3	5		0	0			
8			4	0	4	0	1	2						0
8							0	3	8	2	4	0		

3 3

						1	5	2	1	3	9	2	2	
			8	0	2	4	0		8					
						4			6		8			
			2	4	2	2	6		8		3			
	7		8			5			7	8	5	6		
	0		1			6	0		1		2			
	3		9			3			8		5			
5	6	4	9	7	4	3	9	3	4	7	3	1	0	
	7	0				6						0		
		7		2		0			6		8			
3	1	4	5	9	9	1	8	9	9	8	1	1	8	0
7		7		3					5		7			
6				2					4		2			
7			1	6	9	7	0				5			
9					3	0	6	5	1	4	5	6	4	4

3 4

4	0	5	8	8	5	0	9										
8			1				2			1	0	3	7				
8			8		7		3			7							
4			6	4	2	8	5	0		7		5					
0			4		9		5	1	5	1	2	3					
					8		6		7		0	3					
						3		2				5					
									3	9	2	7	8	5	6	6	4
			4					8		2			3				
			9	3	4	2	5	1		0			6		6		
			3						9	9	7	2	9	5	4		
			3			1	9	1	9	1	8	0			6		
			1						1	0	1			7			
			6								7			0			
						9	3	2	7	6	4	8	0	5	6	2	4

3 5

1				6	5	1	5	7	0	2	7	4	3				
3			9		6												
5			7		1												
8	9	7	2	9	8	1	0	5	2	6	2	0	2	6			
2			9		0						4						
7			6		8				6	3	2	0	2	3	6		
3	9		3		0	8		1							1		
9	3	0	6	5	1	1	4	7							5		
		3			3		9		7		4				7		
8	9	1	8	8	9	9	8	1	7	8					4		
		6			2		0	6	0	7					5		
					4			3		5					7		
					0	3	8	2	4	0	5				4		
									5						4		
						5	4	8	6	2	4				1		

3 6

8				4	0	3	4	3	9						7		
1				2		4			3						8		
7				8		2			3						5		
5			9	2	8	3	9			9		5			6		
1			5		6		5	8	5	6	3	2			1		
4			4		4				6			1			0		
8			9		8				3			0			6		
9	6	3	9	7	2	6	4	8	0	7	8	2	7	6			
2			8														
1			7	2	5	7	7	1	1	7	0						
9			4			0				1	6	1	5	3	1		
2			9	6	1	7	0			0					9		
6						4			7						5		
3						9			0						2		
5						4	0	8	5						4		

3 7

7	3	1	0		8	5			
		1	3	6	7	8	5		
		1	0	8	4				
		1	0	5	5	2	7	9	3
		1	6	6	6	8			
2			5			3	0	4	2
4						4	6		
5	4	9	7	7	4	9	7	7	1
9						2	2		2
0	9	3	2	7	3	0	7	0	8
		5				3	9	3	4
		8	7	1	1	1	9	1	9
		4				8	0		
		0				6			
6	5	4	6	9	8	1	7	2	5

3 8

					2	0	2	4	0
		7	8	2	8	0	4		
				1	8				
		5	4	9	6	3	9	3	6
		2	8	6				0	
		2	7			7	7	6	8
7		4						6	
6		0			3	9	2	7	3
1				9	4			8	
3	9	0	8	6	4	5	1	9	9
1		2	1	7	6	5			3
3		1	5	5	1	5	5	7	7
8		0	0	2	6				1
3	9	0	1	9	7	1	4	5	
8	4	3	2			0			

čtvrtý řádek: $5+4=9$, $54:9=6$, $54+9=63$, $9-6=3$, $96-3=93$, $6+3=9$, $39-3=36$ (nebo $39-33=6$), $9:3=3$, $3+3=6$, $3+6=9$, $36:9=4$, $36+9=45$, $9-4=5$, $4+5=9$

3 9

						8	2	7	9
									3
									1
		5				1	6	8	2
		9						4	9
		5		6		7	8	3	9
	2	4		8		0		7	8
3	0	2	5	5		6	5	1	1
	0	0		4		6			
2	2	4	4	1	4	4	1	0	9
4	0	2			1	3	2	5	
9	0	5	8	5		7		9	3
7					3	6	6	3	0
5					2		0		3
6		7	7	3	8	0		6	8

4 0

1	2	5	5	3	2	7	3	0	2
						8			3
					7	2			5
6	1	0	6	0		3			4
					1	5	6	9	7
					6				7
6	3	5	4	9					4
					9	4	5	9	1
								8	7
								6	0
	7							5	1
	6	2	8	7	0	6	9	1	4
	4	7						3	1
	8	6	2	8	8	9	0	9	1
3	0	8						4	0
9	3	0	3	9	0	4	2	8	5

první řádek: třetí odmocnina z 125=5, druhá odmocnina z 25=5, 5-3=2, 3+27=30, nula nenavazuje, $2 \times 3=6$, $36:2=18$

poslední řádek: $9+30=39$, $30 \times 3=90$, 0 nenavazuje, $42+8=50$, $4 \times 2=8$, $2+850=852$, $2+2=4$

šestý sloupek zprava: $2+3=5$, $23+54=77$, $7 \times 7=49$, $74-9=65$, $6-5=1$, $13-9=4$, $9-4=5$

4 1

9	1	9	3	1	8	5	3	1	3
3		6					9		
4		5					2		
7		9		5			7	8	2
6	5	1	6	4			3	2	6
1			9	7	6	3	3		4
5			6				0	2	0
5	0	7	4	3	7	4	9	6	5
3		7					0		7
5	0	4	3	7				7	
2		5						1	2
9		0						6	
6								4	
9									
8	5	5	9	0	2	9	2	6	9

osmý sloupek: $3 \times 9=27$, $9-2=7$, $927:3=309$, třetí odmocnina z 27=3, $3 \times 30=90$



5	1	5	1	1	2	3	9	7	2	9	5	4	9	7
				8										
8				0	7	5	1	6	9	1				
6	4	0	2	8	0				3					
4				6					6				5	
8				4	9	3	6	3	9	2	4	1	5	
3	1			0		7			9					2
2	8	5	2	3	1	4	2	7	7					5
8	6		0			6			2					3
1	9	1			0				9					
7	0	0							0					
4			3	5	8	4	0		8				8	
3			7			4	2	6	7				6	
7								4					4	
7						1	3	5	8	9	3	8	6	

první řádek: $5 \times 1 = 5$, $51 : 51 = 1$, $51 - 12 = 39$,
 $12 - 3 = 9$, $3^2 = 9$
 šestý řádek: $4 \times 9 = 36$, $936 : 39 = 24$, $39 - 24 = 15$
 pátý sloupek zprava: $93 + 6 = 99$, $972 - 908 = 64$



6	3	9	7			8								3
			2			4			3					1
			9			4			5					8
	8	1	9	9	0	4	8	4	5	9	3			2
			7			8			5					1
			2					3	3	1	1	3	2	8
8		4						5						3
6	6	8	7	4	9	8	1	7	8	5	2	6	0	6
3			6					6		2				
1	7	1	6	9	2			0	4	5	2	9	0	
5		7								6				
5	1	4	0	2	7	0				2				
			9					6	4	5	4	1	0	
			7											
7	3	4	7	3	7	1	0	5	0	6	0	5	2	8



5						3	9	3	8	1	5	6	3	0
5							7			0				9
1	6	4	1	6	4		2			6				3
				6			9			4	2			6
8	6	2	3	6	5		5		4		8			6
7				2	5				9	3	2	7	3	
1	4	9	4	0	9				3		7			9
5						1	0	4	6	8	1	0	7	8
			7			5		2		2				8
			3	5	2	7	8		0	5	9			0
			2						8	1	8	1	1	6
	7	0	7	1	0				0	7	4			4
			3						2	9	1	8	9	0
												5		
												3	8	4
												4	4	2



						6	2	6	1	2	7	3		
			6	0	3	0	2							8
3x			3		6		2	0	7	2	7	3		2
			1	2	3	9		6		5	8			4
				6		4		0		5	8	2	6	0
			7		5	5	0	7	5	7				3
			4					6						6
			0			9	7	2	9	5	4	9	9	4
			4		8			7	3		8			
			7	0	6	4	6		4	2	1			
					2				3	1	7			
					8	1	3	8	4	5	3	5	7	
					8				8	3	1			
									5			8		
4	5	9	9	1	9	8	1	9	9	0	9	0	1	1



								9	5	4	6	3		
		9	7	2		7				2			5	
		0		5	8	5	6	3	9	4			4	
5		6			6			8	6				3	
2		1			6			1	3				9	
4		9	7	2	9	9	3	2	7	3	0			8
9				6		7								8
3	8	2	4	1	2	5	5	5	1	0	4	6	5	9
4	1			6						2				0
7	8			1	2	1	1	1	3	8	2	4		0
7	3	7	1	0	2					5				9
4	6				8	6	5	3	0					8
0					3									8
4					0			7	0	7	0			1
7														9

osmý řádek: $3 \times 8 = 24$, $8 : 2 = 4$, $82 : 41 = 2$, $24 + 1 = 25$,
 třetí odmocnina z 125=5, druhá odmocnina
 z 25=5, $5 : 5 = 1$, $5 + 5 = 10$, $555 + 104 = 659$, $10 - 4 = 6$
 poslední sloupek: $35 + 4 = 39$, $98 - 8 = 90$,
 $88 + 900 = 988$, $8 : 8 = 1$, $8 + 1 = 9$
 desátý řádek: $121 - 113 = 8$, $12 - 1 = 11$, odmocnina
 ze 121=11, $1 \times 1 = 1$, $3 \times 8 = 24$, $38 + 2 = 40$, $8 : 2 = 4$